MECHANIKA 1	GYAK 01.

1.) feladat

Általában egy koordináterendszer minden $\vec{r}$ pontjában definiálhatók az $\vec{e}_\eta(\vec{r})$ lokális bázisvektorok, ahol a „η” index valamelyik koordináta paramétert jelenti, azaz a szokásos jelölések szerint

$$\eta \in \{x, y, z, R, r, \vartheta, \varphi\}$$

Tudjuk, hogy Descartes koordinátarendszer esetén a tér minden pontjában a bázis ugyanaz, azaz

$$\vec{e}_\eta(\vec{r}) = \vec{e}_\eta \quad (\eta = x, y, z)$$

a.) Tekintsünk egy (x,y) síkbeli (R,φ) polár koordinátarendszert! Határozza meg a sík minden (R,φ) pontjában az alábbi deriváltakat és fejezze ki őket a pontban lévő $(\vec{e}_R, \vec{e}_\varphi)$ bázisvektorokkal!

$$\frac{\partial}{\partial \nu}\vec{e}_\eta \qquad \text{ahol} \quad (\nu, \mu = R, \varphi)$$

A feladatot geometriai úton is oldja meg!

2.) feladat

Tekintsünk egy (x,y,z) térbeli (r, ϑ, φ) gömbi koordinátarendszert!
A térben mozog egy „P” pont. A P pont mozgását az $\{r(t), \vartheta(t), \varphi(t)\}$ időfüggvényekkel adjuk meg. Meg kell határoznia azt, hogy a mozgó P ponton utazó megfigyelő a P helyén lévő bázisvektorok időbeli megváltozását mekkorának méri. Azaz határozza meg az

$$\frac{d}{dt}\vec{e}_\nu \text{ időderiváltakat, ha } (\nu = r, \vartheta, \varphi)!$$

A keresett $\dot{\vec{e}}_\nu$ vektorokat a P pont helyén lévő $(\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\varphi)$ bázisvektorokkal kell kifejeznie!

Ehhez hajtsa végre a következő műveleteket!

a.) Geometriai szemlélet alapján írja fel a $(\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\varphi)$ gömbi bázisvektorokat az $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ Descartes bázisvektorok segítségével. Azaz képezze az egységvektorok között definálható alábbi $\underline{\underline{A}}$ mátrixot

$$\begin{bmatrix} \vec{e}_r \\ \vec{e}_\vartheta \\ \vec{e}_\varphi \end{bmatrix} = \underline{\underline{A}} \cdot \begin{bmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{bmatrix} \qquad \text{ahol} \quad \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a_{rx} & a_{ry} & a_{rz} \\ a_{\vartheta x} & a_{\vartheta y} & a_{\vartheta z} \\ a_{\varphi x} & a_{\varphi y} & a_{\varphi z} \end{bmatrix}$$

Az egységvektorok skalárszorzatának alkalmazásával mutassa meg, hogy az alábbi inverz kapcsolatban szereplő $\underline{\underline{B}}$ mátrix az $\underline{\underline{A}}$ mátrix transzponáltja

$$\begin{bmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{bmatrix} = \underline{\underline{B}} \cdot \begin{bmatrix} \vec{e}_r \\ \vec{e}_\vartheta \\ \vec{e}_\varphi \end{bmatrix}$$

b.) Határozza meg a gömbi bázisvektorok idő szerinti deriváltját, azaz:

$$\begin{bmatrix} \dot{\vec{e}}_r \\ \dot{\vec{e}}_\vartheta \\ \dot{\vec{e}}_\varphi \end{bmatrix} = \left[\frac{d}{dt}\underline{\underline{A}}\right] \cdot \begin{bmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{bmatrix}$$

c.) Az előzőek ismeretében a gömbi bázis idő szerinti deriváltját a gömbi bázisban az alábbi módon lehet megadni:

$$\begin{bmatrix} \dot{\vec{e}}_r \\ \dot{\vec{e}}_\vartheta \\ \dot{\vec{e}}_\varphi \end{bmatrix} = \left[\frac{d}{dt} \underline{\underline{A}} \right] \cdot \underline{\underline{B}} \cdot \begin{bmatrix} \vec{e}_r \\ \vec{e}_\vartheta \\ \vec{e}_\varphi \end{bmatrix}$$

3.) feladat

Az $\vec{r}$ helyvektor és a gömbi bázisvektorok $\left(\dot{\vec{e}}_r, \dot{\vec{e}}_\vartheta, \dot{\vec{e}}_\varphi\right)$ időderiváltjainak az ismeretében határozza meg az $\dot{\vec{r}}$ sebesség és az $\ddot{\vec{r}}$ gyorsulás vektorokat

a.) ha a helyvektort Descartes koordinátákkal adjuk meg, azaz $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$

b.) ha a helyvektort henger koordinátákkal adjuk meg, azaz $\vec{r} = R\vec{e}_R + z\vec{e}_z$

c.) ha a helyvektortgömbi koordinátákkal adjuk meg, azaz $\vec{r} = r\vec{e}_r$

d.) Az eddiek alklamazásakent határozza meg az ábrán látható (Cardán felfüggesztéssel megvalósított) forgó korong legfelső „P''' pontjának a gyorsulását!

4.) feladat

Egy pont az (x,y) síkon a következő, polárkoordinátákkal megadott pályán mozog

$$R = k \cdot \varphi$$

a.) Rajzolja fel a pont pályáját!

b.) Határozza meg a pont $\dot{\vec{r}}$ sebesség és az $\ddot{\vec{r}}$ gyorsulás vektorát, ha $\varphi = \omega t$!

c.) Határozza meg (és rajzolja fel) az r(t) függvényt, ha a pont pályamenti sebessége $\dot{s} = v_0$ állandó.

d.) Határozza meg (és rajzolja fel) a φ(t) függvényt, ha a pont pályamenti sebessége $\dot{s} = v_0$ állandó.

4.) feladat

A függőleges (x,y) síkban egy „R" sugarú korong az „O" origóból indulva (t=0) állandó „v_0" sebességgel gördül a vízszintes „+x" tengelyen. Induláskor a korong kerületén lévő „P" pont az origóban volt. A korongnak a középpontja körüli elfordulását „φ"-vel jelöljük.

a.) Határozza meg a „P" pont paraméteres pályaegyenletét, azaz írja fel az x(φ), y(φ) függvényeket!

b.) Határozza meg Descartes koordinátákban a P pont $\dot{\vec{r}}$ sebességét és $\ddot{\vec{r}}$ gyorsulását !

c.) Határozza meg az $\dot{\vec{r}}$ és az $\ddot{\vec{r}}$ vektorok közötti „α" szöget!

d.) Határozza meg a pont „a_t" pályamenti gyorsulását!

e.) Határozza meg a pont „a_n" (pillanatnyi) centripetális gyorsulását!

f.) Az eddigi adatok ismeretében határozza meg a pálya görbületi sugarát a P pont mindenkori tartozkodási helyén!

g.) Hol a legkisebb a pálya görbülete és mekkora ott a görbületi sugár?