

1. Mátrix invariánsok segítségével mondjuk meg, hogy az alábbi mátrixok közül melyik ábrázolhatják ugyanazt a lineáris transzformációt? (Determináns és nyom)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Partciális deriváltak:

- (a) Határozza meg az elsőrendű partciális deriváltakat:

$$f(x, y, z) = \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

- (b) Határozza meg az f_{xx} , f_{yy} és f_{xy} másodrendű partciális deriváltakat:

$$f(x, y) = x^2y - 4x + 3 \sin(y)$$

- (c) Mutassuk meg, hogy ha

$$f(x, t) = \sin(n\pi x) \cos(cn\pi t),$$

akkor

$$c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, t) \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(x, t)$$

- (d) Ha ismert, hogy

$$yz(x, y) = \ln[x + z(x, y)],$$

határozza meg implicit módon:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = ?, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = ?$$

- (e) Ha ismert, hogy

$$z = 2x^2 + 2xy^3, \quad \text{és} \quad x = \sqrt{t}, \quad y = t^2$$

határozza meg:

$$\frac{dz}{dt} = ?$$

(f) Ha ismert, hogy

$$z = e^{1+xy}, \quad \text{és} \quad x = t^2, \quad y = \sin t$$

határozza meg:

$$\frac{dz}{dt} = ?$$

(g) Ha ismert, hogy

$$z = 6xy^2, \quad \text{és} \quad x = r^2 - s^2, \quad y = 2rs$$

határozza meg:

$$\frac{\partial z}{\partial r} = ?, \quad \frac{\partial z}{\partial s} = ?$$

értékét!

3. Ismert, hogy az r sugarú kúp, h magasságú térfogata:

$$V(r, h) = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Határozzuk meg a következőket:

$$\partial_r V = \quad \partial_\rho V = \quad \nabla V = \quad \frac{dV}{dr} = \quad \frac{dV}{dh} =$$

Mik lesznek a teljes deriváltak, ha rögzítjük a $k = h/r$ arányt? (Hasonló kúpok)

4. Gradiens:

Határozza meg az alábbi függvények gradiensét!

(a) $f(x, y, z) = \exp(-xy^2) \cos(z/x)$

(b) $f(r) = \cos(r) \exp(-r)$

(c) $f(x, y, z) = x^2 \exp(-ay^2)/r$