A speciális relativitáselmélet alapjai

A XIX-XX. századforduló táján, amikor a mechanika és az elektromágnességtan alapvető törvényeit már jól ismerték, a fizikát sokan befejezett tudománynak gondolták. Később, lassan olyan új tapasztalatok halmozódtak fel, amelyek fokozatosan megingatták ezt a szemléletet. Ezek a problematikus tények a fizika 2 fő területén alapvető változásokhoz vezettek. Az egyik ilyen változás volt a speciális relativitáselmélet létrejötte. Ennek kifejlödését alapvetően a fény tulajdonságának alaposabb megismerése, a fény sebességének nem végtelen volta segítette elő. A speciális relativitáselmélet elválaszthatatlan attól az alapvető kérdéstől, hogy hogyan írhatók le a fizikai jelenségek különböző vonatkoztatási rendszerekből. A másik felmerült megoldatlan probléma a feketetestek mért sugárzási spektrumának szignifikáns eltérése az elméletileg számított értékektől. Ennek a diszkrepanciának a megfejtése vezetett el a kvantummechanika alaptörvényinek megfogamazásához.

A klasszikus mechanika relativitási elve

Egy test mozgásának leírása úgy történik, hogy annak mindenkori helyzetét egy önkényesen választott rendszerhez, egy ún. vonatkoztatási rendszerhez viszonyítva adjuk meg. Belátható, hogy ha ugyanazt a testet két különböző, egymáshoz képest mozgó vonatkoztatási rendszerből figyeljük meg, akkor a mozgását jellemző adatok egy részét eltérőnek találjuk. Felmerül a kérdés, hogy az adatok közötti összefüggéseket megadó fizikai törvények is különbözőek-e a különböző vonatkoztatási rendszerekben. Tekintsük a vonatkoztatási rendszerek egy speciális fajtájával, amelyekben érvényes a Newton I. axiómája, vagyis teljesül az az állítás, hogy a magukra hagyott, más testekkel kölcsönhatásban nem álló testek mozgásállapota nem változik meg. Az ilyen rendszereket inerciarendszereknek nevezzük. A tapasztalat szerint egy inerciarendszerhez képest állandó sebességgel mozgó bármely másik rendszer is inerciarendszer, vagyis az inerciarendszerek egymáshoz képest állandó sebességgel mozoghatnak.

A különböző inerciarendszerekből nézve a mechanikai jelenségek ugyanúgy zajlanak le, és a különböző rendszerekben a mechanika törvényei azonos matematikai alakban érvényesek. Ez a tapasztalatok alapján elfogadott alaptétel a klasszikus mechanika relativitási elve. A relativitás elvének fontos következménye, hogy az inerciarendszerek a mechanikai folyamatok leírása szempontjából egyenértékűek, vagyis mechanikai kísérletek segítségével nem lehet köztük különbséget tenni. Ezért egy abszolút, mechanikai szempontból kitüntetett inerciarendszert sem lehet találni.

Galilei-transzformáció

Egy adott P pont mindenkori helyzetét a vesszötlen K koordinátarendszerből a mindenkori időtől függő r(t), a K' rendszerből pedig a mindenkori r'(t) helyvektorral adhatjuk meg feltéve, hogy létezik egy abszolut idő, amely minkét rendszerben ugyanaz. Galilei feltételezte, ill. kisérletileg probálta bizonyítani, hogy a fény sebessége végtelen nagy. Ez azt jelenti, hogy bármely rendszerben az idő ugyanugy jár, azaz az órákat össze lehet szinkronizálni a végtelen sebességgel terjedő fény segítségével. A transzformációs képleteket az egyszerűség kedvéért a két koordinátarendszer speciális választása esetén adjuk meg. Legyen a két rendszer x tengelye közös, és a K' rendszer a K hoz képest v sebességgel mozog az x tengely mentén annak pozitív irányában, továbbá az időt mindkét rendszerben attól a pillanattól mérik, amikor a két origó azonos helyen volt. Ekkor:

$$x' = x - v\,t$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$

Ezek az összefüggések adják a klasszikus mechanika Galilei-féle transzformációját. Az időt természetesen nem kell transzformálni. Egyszerüen felírható az inverz transzformáció is:

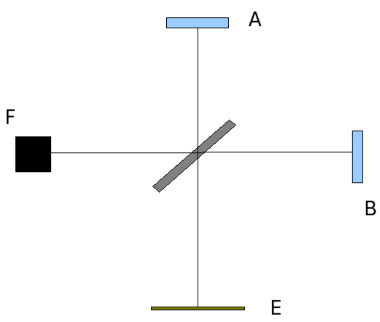
$$x = x' + v\,t$$
$$y = y'$$
$$z = z'$$

A fény

Több kisérlet azt bizonyította Galilei utáni időben, hogy a fénysebesség nem végtelen. Az egyik legkorábbi értékelhető mérést Ole Römer dán fizikus végezte 1676-ban. A Jupiter egyik holdját figyelte meg, és eltéréseket vett észre a keringési periódusban. Römer az eltérésekből 227 000 km/s sebességünek becsülte. Ma a fénysebesség elfogadott értéke 299 792 458 m/s.

A fény terjedése kapcsán úgy gondolták, hogy létezik egy sajátos közeg, az ún. éter, amely mindent kitölt, és az elektromágneses jelenségek ennek a közegnek a mechanikai jellegű állapotváltozásaival függnek össze hasonlóan a hanghullámokhoz. Természetesnek tűnt, hogy a Maxwell-egyenletek ehhez az éterhez rögzített koordinátarendszerben érvényesek, és hogy a fény, mint elektromágneses hullám nem más, mint egy ebben a közegben keltett zavar tovaterjedése, ami teljesen analóg a mechanikai hullámokkal vagy a hanghullámmal. Ennek megfelelően a fény terjedési sebességét is az éterhez viszonyított sebességnek tekintették.

Adodott a feladat, hogy meg kell határozni a Föld mozgását az éterhez viszonyítva. Ezen kisérletek között a legismertebb a Michelson-Morley féle fény interferencia kisérlet. Az 1880-as években Michelson és Morley végzett el egy több kisérletből álló kísérletsorozatot abból a célból, hogy meghatározzák a Földnek az éterhez viszonyított sebességét. Egy monokromatikus fénysugarat félig áteresztő tükörrel kettéválasztottak (lásd az ábrán A és B tükör), majd tükrök segítségével ismét egyesítettek. Az ernyőn keletkezett interferenciaképet vizsgálták miközben elforgatták 90 fokkal az interferométert. Feltéve, hogy a Föld egy adott sebességgel mozog az éterhez képest, az interferencia képnek változnia kellett. A kisérlet azt mutatta, hogy nem változott az interferenciakép. A kisérletet számos alkalommal megismételték különböző időszakokban, különböző méretü berendezéssel, de az eredmény mindig negative volt, azaz az interferenciakép nem változott. Ezt a negative eredményt csak úgy lehet megmagyarázni, hogy elvetjük az éter létezését, azaz azt, hogy van egy kitüntetett inerciarendszer. Igy a mechanikában megismert relativitás elvét kiterjesztették minden fizikai folyamatra. Ez azt is jelenti, hogy minden inerciarendszer egyenrangu és a fény sebessége minden inercia rendszerben ugyanaz az állandó sebesség. Ez egy új helyzetet idézett elő, melynek törvényeit matematikai formulákba kellett megfogalmazni.



A speciális relativitáselmélet alappillérei

A XIX-XX. századforduló éveiben többen is foglalkoztak (Lorentz, Poincaré, Einstein) a törvények meghatározásával, de Einstein volt az aki általános fizikai elmélet formájába öntötte a megfogalmazott követelményeket. Ő vette észre, hogy a tapasztalati tényekkel egyező elmélet két alapvető fizikai elvből levezethető:

1. A fizikai folyamatokat leíró törvények minden inerciarendszerben azonos matematikai alakban érvényesek.
2. A vákuumban terjedő fény sebessége minden inerciarendszerben azonos, a korábban emlitett univerzális fizikai állandó.

Ebből a két alapelvből levezethető a Lorentz-transzformáció. Az így létrejött, a fenti két elvvel összhangban álló fizikai elmélet a speciális relativitáselmélet.

Lorentz-transzformáció

A fenti fizikai elvekkel összhangban álló Lorentz-transzformáció egy egyszerü levezetése a következő.Tegyük fel, hogy abban a pillanatban, két rendszer origója egybeesik, egy fényjelet indítunk el ebből a pontból az egybeesó x tengelyek irányába. A két rendszer egymáshoz viszonyított sebessége v nagyságü és x irányú. A 2. alapelv szerint a fény minden irányban azonos c sebességgel terjed mindkét koordinátarendszerben, és az a pont az x tengelyeken, amelyeket a fényjel t illetve t' idő alatt elért, a két koordinátarendszerben x ill x' koordinátákkal irható le. Mi itt most nem térünk ki rá de bizonyítható, hogy az y és z koordináták nem transzformálodnak. A levezetéshez induljunk ki abból, hogy a transzfomációs képleteken hasonlóak a Galilei transzformációhoz és csak kisebb változtatást kell csinálni. Irjuk fel a x irányú transzformációs képletet és az inverz képletet, majd módósitsuk a a matematikai képleteket egy γ faktorral a következő módon szem elött tartva az 1. alappillért és feltételezve, hogy az időt is kell transzformálni:

$$x' = \gamma\,(x - v\,t)$$
$$x = \gamma\,(x' + v\,t')$$

Mivel fénysugár mozgásáról van szó, igy a képleteink a következőképpen módosulnak:

$$ct' = \gamma\,(ct - v\,t)$$
$$ct = \gamma\,(ct' + v\,t')$$

2 egyenletünk van 3 ismeretlennel (t, t' és γ) , de ha felcseréljük az egyik egyenlet jobb és bal oldalát majd elosszuk egymással a 2 egyenletet, akkor t és t' kiesik, γ-ra a következő kifejezést kapjuk:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Igy megkaptuk a térkoordináták transzformációk képleteit. Hátravan még az idótranszformáció meghatározása. Ez kis számolás után megkapható, ha az $x' = \gamma\,(x - v\,t)$ egyemlet jobb oldalát beírjuk a második egyenlet x' helyére és egy kicsit átalakítjuk az egyenletet:

$$t' = \gamma\,(t - (v/c^2)\,x)$$

ill. az invert képlet:

$$t = \gamma\,(t' + (v/c^2)\,x').$$

Összefoglalva:

$$x' = \gamma\,(x - v\,t)$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = \gamma\,(t - (v/c^2)\,x)$$

ahol

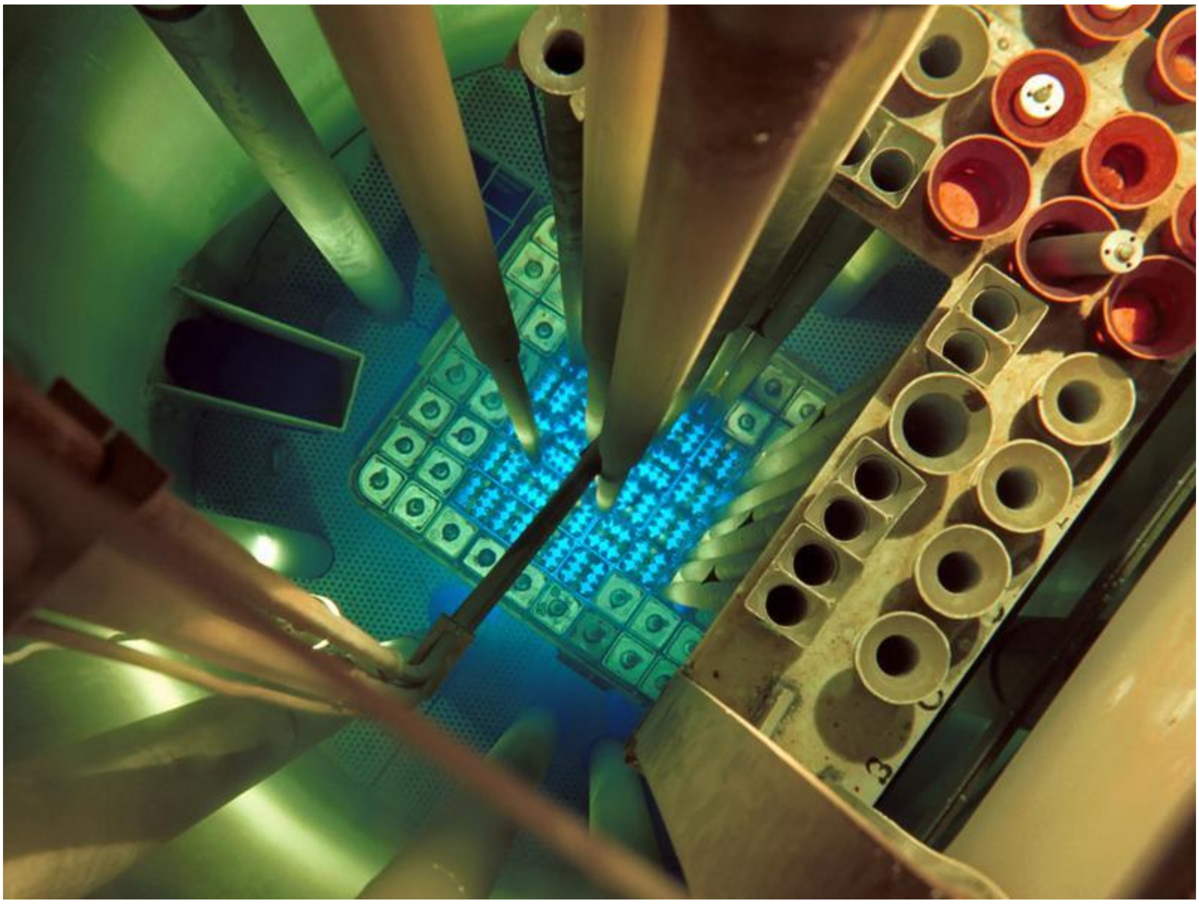
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Az inverz transzformáció:

$$x = \gamma\,(x' + v\,t')$$
$$y = y'$$
$$z = z'$$
$$t = \gamma\,(t' + (v/c^2)\,x').$$

A Lorentz-transzformáció egy fontos tulajdonsága, hogy nincs ellentmondásban az évszázadokon át használt és helyesnek talált Galilei-transzformációval. Az összefüggésekből látható ugyanis, hogy a fénysebességnél nagyságrendekkel kisebb sebességeknél visszakapjuk a Galilei-transzformációt. A mechanika klasszikus törvényeitől tehát csak akkor várható eltérés, ha a két vonatkoztatási rendszer relatív sebessége összemérhető a c vákuumbeli fénysebességgel.

Ugyancsak fontos tény, hogy a Lorentz-transzformáció a négyzetgyök alatti mennyiség negativ, igy fizikailag értelmetlenné válik, vagyis a vákuumbeli c fénysebesség határsebesség szerepét játssza. A tapasztalat ezt a következtetést eddig nem cáfolta meg. Ez igaz nem vákuumbeli folyamatok esetében is. A közegbeli fénysebesség itt is egy határsebesség. Egy ilyen ismert effektus a Cserenkov sugárzás. Ha két közeg határán egy töltött részecske átlép a másikba olyan sebességgel, ami nagyobb az új közegbeli fénysebességnél, akkor a természet úgy oldja meg ezt a problémát, hogy azonnal lelassítja ezt a töltött részecskét. Az viszont ismert, ha egy töltés gyorsul (lassul), akkor sugároz. Ebben az esetben is ez történik, ami kék szinü sugárzás. A sugárzás neve: Cserenkov sugárzás. A BME Tanreaktorában ez a Cserenkov sugárzás megtekinthető. Az alábbi kép ezt mutatja.



Távolság kontrakció és időtartam dilatáció

Egy tárgy hosszának mérése során a tárgyhoz képest nyugvó, és ahhoz képest mozgó megfigyelő esetében más és más lesz. Tegyük fel, hogy a megfigyelő a K rendszerből méri egy az x tengellyel párhuzamos rúd hosszát, amely hozzá képest v sebességgel mozog az tengely mentén. Mivel a rúd a K' rendszerben nyugalomban van, a rúd x' hosszát itt különösebb nehézség nélkül megkaphatjuk két végpontjának x_1' és x_2' koordinátáiból
Ha a rúd hosszát a K rendszerből akarjuk megmérni, amelyhez képest a rúd mozog, akkor ugyancsak a végpontjainak x_1 és x_2 koordinátáit kell meghatároznunk a K rendszerben egyidejüleg. A lényeg, hogy egyidejüleg. Az egyidejűleg mért koordinátákból a K rendszerben mért Δx hossz aalakban kapható. A két rendszerben mért koordináták kapcsolatát a Lorentz-transzformáció adja meg, ami a $t_1 = t_2 = t$ egyidejüség felhasználásával az alábbi alakot ölti.

$$x_1' = \gamma\,(x_1 - v\,t)$$
$$x_2' = \gamma\,(x_2 - v\,t)$$

Kivonva egymásból a két egyenletet kapjuk:

$$x_1' - x_2' = \gamma\,(x_1 - x_2)$$

Mivel γ egynél nagyobb szám, ezért a K rendszerben (ahol a megfigyelő van) úgy látja, monha megrövüdlne a hozzá képest mozgó tárgy. Ez azt jelenti, hogy pl egy méterrúd hozzám képest v sebességgel párhuzamosan a méterrúddal mozog, akkor én ezt rövidebbnek látom. A fenti eredményhez először Lorentz jutott el, ezért azt a tényt, hogy a mozgó megfigyelő kisebb hosszt mér Lorentz-kontrakciónak vagy hosszúság kontrakciónak nevezik.

Vizsgáljuk meg az időintervallum transzformációját. Tegyük fel, hogy a hozzánk képest v sebességgel mozgó K' rendszerben azonos helyen, a rendszerhez képest nyugalomban lévő pontban, azaz ugyanabban a pontban lejátszódik két esemény. A két esemény között eltelt idő ($t_2' - t_1'$). Az események helyére ugyanitt érvényes, hogy $x_1' = x_2' = x'$. Ugyanezt a két eseményt a K rendszerből megfigyelve azok időpontját t_1 -nek illetve t_2 -nek találjuk, így a köztük eltelt idő ($t_2 - t_1$). A két időtartam kapcsolatának kiderítése érdekében fejezzük ki a vesszőtlen időtartamokat a vesszősőkkel a Lorentz-transzformáció segítségével és kapjuk:

$$t_1 = \gamma\,(t_1' - (v/c^2)\,x')$$
$$t_2 = \gamma\,(t_2' - (v/c^2)\,x').$$

Kivonva egymásból a 2 egyenletet kapjuk:

$$t_1 - t_2 = \gamma\,(t_1' - t_2')$$

Ebből az látszik, hogy az eseményekhez képest mozgó rendszerben kapott időtartam a hosszabb. Ez az idődilatáció amely szintén csak a fénysebességhez képest nem elhanyagolható sebességeknél számottevő, természetesen kis sebességek esetén is létezik.

Az időtartamokra vonatkozó összefüggések egyik kísérleti bizonyítékát szolgáltatják a Föld felszínére érkező részecskék, a müonok vagy mü mezonok . Ezek kb. 10 km magasságban keletkeznek atomi ütközések során, és a fénysebességhez közeli sebességgel haladnak a Föld felszine felé. A laboratóriumban végzett mérések szerint a müonok átlagosan $\tau_0 \approx 2 \times 10^{-6}$ s idő eltelte után elbomlanak. A klasszikus elgondolás szerint fénysebességgel mozogva a müonok keletkezésük után átlagosan maximálisan kb. 600 métert tudnak megtenni, majd elbomlanak. A Földfelszín eléréséhez szükséges távolságnak, 10 km-t nem képesek megtenni. A tapasztalat ezzel szemben az, hogy a müonok ennek ellenére mégis leérnek a Föld felszínére lehet detektálni őket. A fenti számításnál használt τ_0 időtartam a müonhoz képest nyugvó rendszerben mért nyugalmi élettartam, a számítást pedig a müonhoz képest nagy sebességgel mozgó rendszerben végeztük és a speciális relativitás elmélet ismeretében ez hibás gondolkodás. A Földhöz képest mozgó müont vizsgálva a számításnál természetesen a transzformált élettartamot kell használnunk. Ha a müon sebessége w = 0.999c, akkor a transzformált időtartaltalom kb. $3.3 \cdot 10^{-5}$ s, és így a befutott út kb. 10 km lesz, a tapasztalattal egyezésben. Ezeket a részecskéket tudjuk detektálni a Föld felszinén.

Természetesen, ha a problémát a müonnal együttmozgó rendszerből vizsgáljuk, akkor is arra a végeredményre kell jutnunk, hogy a müon elérheti a Föld felszínét. Ekkor az élettartam a τ_0 nyugalmi érték, a befutott út pedig a klasszikusan is kapott 600 m lesz. Ellentmondás azonban nincs, mert most a befutandó út nem az s_0 = 10 km nyugalmi hossz, mivel a müonhoz képest mozgó távolságról van szó. Vagyis a müon eszerint a számolás szerint is leérhet a Föld felszínére: a fizikai folyamat leírása szempontjából a két inerciarendszer a várakozásnak megfelelően egyenértékű.

Első hallásra azt hiheti az ember, hogy ennek az effektusnak semmi jelentősége a mindennapi életünkben. Korunk egyik új tájékozódást segítő eszköze a GPS (Global Positioning System) az egész világon használható műholdas helymeghatározó rendszer. Egy ilyen pontos eszköz elkészítéséhez figyelembe kell venni az idődilatációt. Az egész rendszer órák használatából áll és ezek az órák egymáshoz képest mozognak. A műholdon lévő óra mozog a vevő órájához képest, az idő tehát megnyúlik. Ezért az idődilatációt kompenzáló korrigáló rendszert kell beépíteni GPS-be.

A sebesség-transzformáció

Tegyük fel azt a kérdést, hogyha egy vonatban egy utas u sebességgel mozog a vonathoz képest, és a vonat a Föld felszinéhez képest w sebességgel mozog, akkor milyen sebességünek látjuk az utast a földfelszinen állva? A klasszikus fizika szerint v = w + u az utas sebessége, de a speciális relativitás elmélet mást mond. Irjuk fel a Lorentz traszformáció ide vonatkozó képleteit. Tekintsük a vonat mozgásának irányát az x tengelynek. Akkor felírható:

$$dx = \gamma\,(dx' + w\,dt') \quad \text{és}$$
$$dt = \gamma\,(dt' + (w/c^2)\,dx')$$

differenciális alak, ahol a „d” betü a kis mennyiségeket szimbolizálja. A 2 egyenletet elosztva egymással, majd a jobboldali tört számlálóját és nevezőjét elosztva dt'-mal és végezetül figyelembevéve, v = (dx/dt) ill. u = (dx'/dt') ami az utas sebessége a vonathoz képest, kapjuk a sebességösszeadás képletét:

$$v = \frac{w + u}{1 + \frac{wu}{c^2}}$$

Látható, hogy a fénysebességhez képest nagyon kis sebességek esetében a nevező közelít az egyhez és ebben az esetben visszakapjuk a klasszikus sebesség összeadás képletet. Egy másik érdekes helyzet, amikor nem egy utas, hanem a fénysugár mozgását vizsgáljuk. Ekkor az u = c. Ezt visszahelyettesítve kapjuk, hogy v = c. Ez azt is jelenti, hogy képletünk „tudja" a relativitáselméletet, azaz a fény sebessége minden inercia rendszerben ugyanaz az állandó.

A tömeg és az impulzus

A Newton féle klasszikus mechanikai törvények feltételezik, hogy a tömeg nagysága független a tömeg sebességétöl. Newton zsenialitása, hogy a közismert erő egyenlö tömeg szorozva gyorsulás (F = ma) törvényt eredetileg nem így írta fel, hanem erö egyenlő az impulzus (p = mv) idő szerinti deriváltjával (F = dp/dt). Ha feltételezzük, hogy a tömeg állandó, akkor kiemelhető a deriválás elé és a sebesség időderiváltja a gyorsulás és azért használhatjuk a F=ma képletet. Walter Kaumann (1871-1947) eletronokat gyorsított fel nagy sebességre és a mozgásukat megfigyelve azt tapasztalta, hogy a mechanika régi törvényei hamis leírást adnak. Ebből az eredményböl kiindulva megállapították, hogy a w sebességgel mozgó mért m(w) tömeg és a testhez képest nyugvó rendszerben mért m_0 nyugalmi tömeg között az

$$\mathrm{m(w)} = \gamma\, \mathrm{m_0} = \frac{\mathrm{m_0}}{\sqrt{1 - \frac{\mathrm{w}^2}{\mathrm{c}^2}}}$$

összefüggés érvényes. Vagyis a tömeg nem invariáns, a koordinátarendszertől függő mennyiség. Egy test tömegét mindig nagyobbnak találjuk, ha hozzánk képest mozog, mint ha hozzánk képest nyugalomban van. Erre a relativisztikus tömegnövekedésre is érvényes azonban, hogy csak a fénysebességet megközelítő sebességeknél számottevő. Ezen tömeg transzformáció után már igaz a relativisztikus impulzusnak a klasszikus impulzussal formailag azonos $p=m(w)w$ definíciója.

Az energia

Ha felgyorsítunk egy tömeget egy adott sebességre akkor a tömege megnövekedik. Számítsuk ki, hogy mennyi munkát kell végezni ehhez. A munkavégzést az erő szorozva uttal összefüggés segítségével kaphatjuk meg. Az erőt a impulzus időderiváltjából határozhatjuk meg (dp/dt), amelyet integráljuk az ut szerint a kezdő és végpont között. A tömegpontra ható F erő az 1 pontból a 2 pontba való átmenet során amikoris nulla kezdősebességről felgyorsítjuk v végsebességre egy m_0 nyugalmi tömegü testet

$$L = \int_0^v F.ds = \int_0^v \frac{dp}{dt}.ds = \int_0^v \frac{ds}{dt}.dp = \int_0^v w.d\left(\frac{m_0 w}{\sqrt{1-\frac{w^2}{c^2}}}\right) =$$

$$= \int_0^v w.m_0.d\left(\frac{w}{\sqrt{1-\frac{w^2}{c^2}}}\right)$$

módon számítható ki. Felhasználva a

$$d\left(\frac{w}{\sqrt{1-\frac{w^2}{c^2}}}\right) \equiv \left(1-\frac{w^2}{c^2}\right)^{\left(-\frac{3}{2}\right)} dw$$

matematikai azonosságot a határozott integrál meghatározható. Értéke:

$$L = m_0 c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right).$$

Baloldalon az található, hogy egy m_0 nyugalmi tömegü testet mennyi energia befektetésével tudjuk nulla sebességről v sebességre felgyorsítani. Ha eltekintünk a c^2 faktortól, akkor jobboldalon az a tömegkülönbség van, ami létrejött azáltal, hogy felgyorsítottuk a testet. Vagyis ez az egyenlet azt fejezi ki, hogy az adott *E* energia mekkora tömeget tud létrehozni. Konkrétan a jól ismert alakban:

$$E = mc^2$$

Eszerint az energia a test tömegével van egyértelmű kapcsolatban. Ebből következik, hogy m tömeg egyben mc^2 energiatartalmat jelent, és fordítva, minden E energiatartalom E/c^2 tömeggel jár együtt. Másrészt egy rendszerben az energia és a tömeg változása mindig együtt, egymással arányosan történik.

A $v << c$ esetben az mc^2 kifejezést v^2/c^2 szerint sorbafejtve, elhanyagolva a magasabb rendü tagokat megkapjuk a klasszikus mozgási energia kifejezést. Abból, hogy a tömeg és az energia egymással arányos, következik, hogy a relativitás- elméletben a tömegmegmaradás- és az energia-megmaradás törvénye nem két különálló törvény: egyik a másikból következik, és lényegében mindkettő ugyanazt állítja.

A mindennapi életünkben fontos szerepet játszik ez az összefüggés, gondoljunk csak a nukleáris erőmüvekre, ahol tömeget alakítanak át villamos energiává. Hazánkban jelenleg közel fele felhaszmált energiát ilyen kontrolált maghasadásos reakción alapuló erőműblokkokban állítjak elő Pakson.