

Beugró kérdések

Elektrodinamika 2. vizsgához

1. Gömbült koordináták

Henger koordináták: $\mathbf{r}=(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z)$

Számítsa ki a gradienst, divergenciát és a skalár Laplace operátort henger koordinátákban!

2. Laplace egyenlet azimutális szimmetria esetén

A Laplace-egyenlet alakja gömbi koordinátákban

$$\frac{1}{r} \partial_r^2 (r \Phi) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta \Phi) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_\varphi^2 \Phi \right) = 0$$

a) Azimutális szimmetria, azaz a potenciál φ függetlensége mellett válassza szét a változókat!

b) Számítsa ki a radiális megoldást és írja fel az általános megoldást, ha a szögfüggő részt $P_l(\cos \theta)$ - val jelöljük!

c) Fogalmazza meg, mit jelent az, hogy a $P_l(x)$ Legendre-polinomok teljes rendszert alkotnak a $[-1, 1]$ intervallumon négyzetesen integrálható függvények terében!

d) Igazolja, hogy amennyiben $r' = |\vec{x}'| > r = |\vec{x}|$ akkor

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^l}{r'^{l+1}} P_l(\cos \gamma)$$

ahol γ az \vec{x} és \vec{x}' vektorok által bezárt szög, amennyiben a normálás $P_l(1) = 1$!

3. Potenciálok síkbeli polár koordinátákban

A síkbeli polárkoordináták: $x=r \cos \varphi$ $y=r \sin \varphi$

a) A Laplace-egyenlet alakja

$$\frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r \Phi) + \frac{1}{r^2} \partial_\varphi^2 \Phi = 0$$

Válassza szét a változókat!

b) Milyen potenciált kapunk forgásszimmetrikus esetben?

c) Írja fel a Laplace-egyenlet általános megoldását síkbeli polár- koordinátákban!

d) Tegyük fel, hogy adott a potenciál egy R sugarú körön: $\Phi(r=R, \varphi) = V(\varphi)$! Írja fel a megoldást a kör belsejében, illetve külsejében!

4. Gömbfüggvények: a gömbi Laplace-egyenlet megoldásai

$$\left[\frac{1}{\sin \theta} \partial_{\theta} (\sin \theta \partial_{\theta}) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_{\varphi}^2 \right] Y_{lm}(\theta, \varphi) = l(l+1) Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

a) Írja fel a gömbfüggvények ortogonalitási relációját!

b) Fogalmazza meg a gömbfüggvények teljességét!

c) A (θ, φ) irányú egységvektort \mathbf{n} -nel jelölve, az O forgatás alatt

$$Y_{lm}(O\mathbf{n}) = \sum_{m'} D_{mm'}^{(l)}(O) Y_{lm'}(\mathbf{n})$$

Egészítse ki a $D^{(l)}$ mátrix alábbi tulajdonságait!

$$D^{(l)}(O)^\dagger D^{(l)}(O) =$$

$$D^{(l)}(O_1 O_2) =$$

5. Gömbi multipólusok

a) A $P_l(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}') = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_m Y_{lm}(\mathbf{n})^* Y_{lm}(\mathbf{n}')$ addíciós tétel felhasználásával fejtse ki:

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} =$$

b) A fenti reláció segítségével írja fel egy véges folytonos töltéeloszlás multipólus kifejtését a töltésektől nagy távolságban!

c) Hány független komponense van az l -edik multipólusnak?

6. Kvázistacionárius közelítés

a) Milyen határfeltételeket elégít ki az elektromos és a mágneses mező ideális fém felületén? Hogyan viszonyulnak a felületi áramsűrűséghez?

b) Mi az a skin-effektus?

c) Mi a kvázistacionárius közelítés feltétele σ és ϵ anyagi állandókkal kifejezve? Hogyan írható ez fel a hullámhossz segítségével?

d) Hogyan írható fel az effektív energiaáram sűrűség komplex $\mathbf{E} \sim e^{-i\omega t}$ és $\mathbf{H} \sim e^{-i(\omega t + \varphi)}$ térerőségekkel kifejezve?

7. Hullámvezető

a) Milyen változókra redukálható általában az elektromos és a mágneses térerősség? Milyen egyenletet elégítenek ki ezek a változók?

b) Mi a TEM módus és mikor létezik? Mi a diszperziós relációja?

c) Mi a TE és TM módus? Milyen a diszperziós relációjuk és mi a terjedésük feltétele?

d) Mennyi a terjedő hullámok csoport-, illetve fázissebessége?

8. Üregrezonátor: vegyünk egy két transzverz fémsíkkal lezárt hullámvezetőt.

- a) Mi a TE, illetve a TM módus esetén a maszterfüggvény határfeltétele a határoló síkokon?
- b) Írja fel az üregrezonátor módusok frekvenciáit a hullámvezető diszperziós relációjából kiindulva!
- c) Mi a jósági tényező definíciója? Milyen a spektrálfüggvény egy véges Q jósági tényező esetén, és mennyi a félértékszélessége? A felsorolt tényezők közül melyektől függ a jósági tényező?

a rezonátor geometriája, a gerjesztett módus, a rezonátor falának anyaga, a módus amplitúdója

9. Lineáris válaszmélet és dielektromos együttható

- a) Írja fel a \mathbf{P} polarizáció és az \mathbf{E} térerősség közti összefüggést eltolás-invariáns lineáris választ feltételezve valós időben, illetve Fourier-térben!
- b) Fejezze ki a dielektromos állandót a válaszfüggvénnyel!
- c) Minek a következménye és milyen mennyiségek közötti összefüggést ad meg a Kramers-Kronig reláció?
- d) Milyen fizikai jelenséget ír le a törésmutató imaginárius része?

10. Szabad elektrongáz dielektromos együtthatója

- a) Hogyan adható meg a szabad elektronok dielektromos együtthatója az ω_p plazmafrequencia segítségével?
- b) Minek a frekvenciája ω_p ? Hogyan terjednek az elektromágneses hullámok, ha (1) $\omega > \omega_p$ (2) $\omega < \omega_p$?

11. Vezetőképesség és dielektromos állandó

- a) Hogyan fejezhető ki a polarizációs áramsűrűség a polarizációval?
- b) Az Ohm-törvényből milyen összefüggés következik a fémek relatív dielektromos állandója és vezetőképessége között?

12. Retardált potenciál és sugárzás

- a) Írja fel a retardált megoldást az \mathbf{A} vektorpotenciálra $e^{-i\omega t}$ időfüggésű áramsűrűség esetén!
- b) Mi a távoli zóna és hogyan néz ki \mathbf{A} sugárzási része?
- c) Milyen sorfejtés adja meg a sugárzás multipólus komponenseit és mi az érvényességének a feltétele?

13. A sugárzás leírása

- a) Milyen egyszerűsítést tehetünk, amikor kiszámítjuk a mágneses térerősség sugárzási komponensét a vektorpotenciálból?
- b) Hogyan kapjuk meg az $\bar{\mathbf{S}}$ effektív energia áramsűrűséget a mágneses térerősség ismeretében? Milyen irányba mutat?
- c) Fejezze ki $\bar{\mathbf{S}}$ -ből az egységnyi térszögbe kimenő teljesítményt!
- d) Kvalitatíven írja le a szögeloszlást elektromos dipólsugárzás esetén?

14. Szórási hatáskeresztmetszet és alakfaktor

- a) Definiálja a $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ differenciális szórási hatáskeresztmetszetet!
- b) Mi az alakfaktor és hogyan számíthatjuk ki?
- c) Mennyi egy random közeg alakfaktora?
- d) Hogyan kapjuk meg egy köbös kristály alakfaktorát? Mi az erősítés feltétele (Bragg feltétel) és mennyi teljesülése esetén az alakfaktor? Hogyan szóródik egy kristályon a rácsállandónál jóval nagyobb hullámhosszúságú elektromágneses hullám?

15. Rayleigh szórás

- a) Írja fel az egy molekulán történő szórás hatáskeresztmetszetének függését a k hullámszámtól, valamint az \mathbf{e}_0 bejövő és az \mathbf{e} kimenő polarizációs vektortól, dipólszórást feltételezve!
- b) A fentiből kiindulva, mennyi a hatáskeresztmetszet V térfogatban, ρ sűrűségű gázban? Hogyan kapható meg ebből a csillapodási együttható?
- c) Miért kék az ég és miért vörös a lemenő nap? Az égbolt mely részéről érkezik síkban tökéletesen poláros fény? Melyik síkban poláros ez?
- d) Hogyan hatol át a fény a kritikus ponthoz közeli közegen? Mi ennek a magyarázata?

16. Retardálás

- a) Ponttöltés pályája $\mathbf{y}(t)$. A térerősséget t időpillanatban, \mathbf{x} helyen mérjük. Milyen egyenlet határozza meg meg a \bar{t} retardált időt és az R retardált távolságot?
- b) Mennyi a relatív faktor a megfigyelési és a retardált idő között ($dt/d\bar{t}$)?
- c) A fentiek segítségével írja fel a skalárpotenciált! (4 pont)

17. Ultrarelativisztikus mozgást végző részecske sugárzása

- a) Mi jellemzi az ultrarelativisztikusan mozgó test sugárzásának irány szerinti eloszlását? Hasonlítsa ezt össze a dipólközelítéssel! Készítsen rajzot is!
- b) Rajzolja fel kvalitatíve a körpályán mozgó ultrarelativisztikus részecske sugárzási spektrumát! Hogyan kapható meg a jellemző levágási frekvencia egyszerű megfontolással?
- c) Mi a lényeges különbség a kör alakú és az egyenes gyorsító sugárzási vesztesége között? Hogyan érinti ez a gyorsítók tervezését?

18. Cserenkov sugárzás

- a) Mi a sugárzási feltétel (az a feltétel, ami megadja, mely frekvenciákat tartalmazhatja egyáltalán a Cserenkov sugárzás)?
- b) Mi határozza meg a Cserenkov sugárzás jellemző frekvenciáját?
- c) Milyen szögben lép ki a sugárzás?